

Démonstration mathématique

Si on admet que les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $i = A + Be^{Ct}$ où A, B, C sont constantes et t le temps écoulé, alors $\frac{di}{dt} = BCe^{Ct}$ et l'équation devient :

$$E = LBCe^{Ct} + rA + rBe^{Ct}$$

puis :

$$Be^{Ct}(LC + r) = E - rA.$$

Pour vérifier cette équation, il faut que $LC + r = 0$ et $E = rA$ puisque e^{Ct} varie en fonction du temps.

On obtient alors :

$$C = -\frac{r}{L}$$

et :

$$A = \frac{E}{r}$$

B peut alors prendre une infinité de valeurs. Ainsi, si la bobine est en charge, $i_{t=0} = 0$ d'où $A + B = 0$ et :

$$B = -\frac{E}{r},$$

ce qui permet de trouver la solution de l'équation différentielle en i .

Démonstration usuelle

La solution de l'équation différentielle : $u_B = L\frac{di}{dt} + ri$ est la somme de deux termes :

- i_l , la solution du *régime libre* correspondant à l'équation sans second membre $0 = L\frac{di}{dt} + ri$
- i_f , la solution du *régime forcé* correspondant au régime établi quand toutes les dérivées sont nulles et donc solution de $u_B = ri$.

Solution du régime libre

$$0 = L\frac{di}{dt} + ri$$

Séparation des variables :

$$L\frac{di}{dt} = -ri \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{r}{L}.i \Rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{r}{L}.dt$$

On intègre les deux membres

$$\text{Log}i = -\frac{r}{L}.t + Cte$$

Si $x = y$ alors $e^x = e^y$ donc

$$i_l = e^{-\frac{r}{L}.t + Cte} \Rightarrow i_l = K.e^{-\frac{r}{L}.t}$$

Solution du régime forcé

Lorsque la bobine est soumise à un échelon de tension E , la solution du régime forcé est :

$$i_f = \frac{E}{r}.$$

Solution de l'équation

$$i = K.e^{-\frac{r}{L}.t} + \frac{E}{r}.$$

La détermination de la constante K est faite grâce à la condition physique suivante : Le courant à travers une inductance ne peut en aucun cas subir de discontinuité.

À l'instant $t = 0$, le courant vaut $I_i = I_{initial}$. On obtient l'équation :

$$I_i = K + \frac{E}{r} \Rightarrow K = I_i - \frac{E}{r} \text{ Donc}$$

$$i = \left(I_i - \frac{E}{r}\right).e^{-\frac{r}{L}.t} + \frac{E}{r}.$$

Souvent, dans les *cas d'école*, le courant initial est nul. On obtient alors :

$$i = \frac{E}{r} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$